Universidad Nacional de Ingenieria **P.A. 2006-I**
Facultad de Ingenieria Mecanica **26-05-2006**
Área de Ciencias Basicas y Humanidades

Solucionario del Examen Parcial de Cálculo Numérico

Solo se permite el uso de una hoja de formulas

Problema 1

a) Si se tiene un computador que maneja mantisa con un máximo de 5 dígitos, y el exponente máximo permitido es 2 y el mínimo es –2, entonces para x = 0.2345789, y = 1.25 calcule: *fl* (*x*+ *y*) y *fl* (*y*/*x*)

Solución

Para este computador la representación normalizada en punto flotante es:

$$fl(x) = \pm 0.d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 \times 10^n$$

$$donde \quad -2 \le n \le 2, \quad 1 \le d_1 \le 9, \quad 0 \le d_i \le 9 \quad i = 1,2,3,4,5$$

- $x + y = 0.2345789 + 1.25 = 1.4845789 \Rightarrow fl(x+y) = 0.14846 \times 10^1$
- $\frac{y}{x} = \frac{1.25}{0.2345789} = 5.3286975086 \Rightarrow fl(y/x) = 0.53287 \times 10^1$

b) Sea $A = \begin{bmatrix} a & c \\ d & a \end{bmatrix}$, escriba la condición que deben cumplir *a*, *d* y *c* para que la matriz no sea diagonalizable?

Solución

Polinomio característico:

$$P(\lambda) = (a - \lambda)^2 - dc$$

$$Espectro(A) = \{a + \sqrt{dc}, a - \sqrt{dc}\}$$

Si *dc=0* los valores propios serán iguales: la multiplicidad algebraica sera 2, mientras que la multiplicidad geométrica sera 1 y la matriz no se podrá diagonalizar.

c) Elabore una función que determine si una matriz cuadrada es tridiagonal: ***function flag=verifica(A)***
% 1 : Es cuadrada y tridiagonal
% 0 : En caso contrario

Solución

function flag=verifica(A)
% 1 : Es cuadrada y tridiagonal
% 0 : En caso contrario
flag=0;
if size(A,1)== size(A,2)

```
    T = diag(diag(A)) + diag(diag(A,1),1) + diag(diag(A,-1),-1);
    if T = = A
        flag=1;
    end
end
```

d) Sea $f(x) = \frac{8x-1}{x} - e^x$, ¿Cuál de los siguientes funciones será algoritmo del punto fijo para el cero cercano a x_0=0.5?

1) $F_1(x) = \ln\left[\frac{8x-1}{x}\right]$ 2) $F_2(x) = 0.5\ln\left[\frac{8x-1}{x}\right] - 2x$ $\boxed{3)}$ $F_3(x) = \frac{1}{8}\left(1 + xe^x\right)$

4) N.A.

e) Sea el sistema lineal real

$$\begin{cases} ax + by & = s \\ cx + dy & = q \end{cases} \qquad \textit{con } a,d \neq 0$$

Plantear los métodos de Jacobi y Gauss Seidel. Probar que ambos convergen si y solo si $|bc| < |ad|$.

Solución

$$Tj = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{b}{a} \\ -\frac{c}{d} & 0 \end{bmatrix} \qquad \rho(Tj) = \left|\sqrt{\frac{cb}{da}}\right| < 1 \qquad \text{Solo si } |bc| < |ad|$$

$$Tgs = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{b}{a} \\ 0 & \frac{cb}{ad} \end{bmatrix} \qquad \rho(Tj) = \left|\frac{cb}{da}\right| < 1 \qquad \text{Solo si } |bc| < |ad|$$

Problema 2

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales cuya matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 0 & \frac{2}{3}a^3 \\ 0 & \frac{2}{3}a^3 & 0 \\ \frac{2}{3}a^3 & 0 & \frac{2}{5}a^5 \end{pmatrix}$$

a. Determinar *a* para obtener la factorización de Cholesky.

Solución

Debe verificar que A es simétrica y definida positiva, por Silvester:

$$2a > 0 \qquad \det\begin{bmatrix} 2a & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}a^3 \end{bmatrix} \qquad \det(A) > 0 \quad \Rightarrow \quad a > 0$$

b. Obtenga la factorización de Cholesky

Solución

$$A = L.L^T \Rightarrow L = \begin{pmatrix} \sqrt{2a} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}a^3} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{a^5} & 0 & \sqrt{\frac{8}{45}a^5} \end{pmatrix}$$

c. Para $a = 1$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, resolver el sistema $Ax=b$ por el método de Crout

Solución

Si $a = 1$, tenemos :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 8/45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y además } \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resolviendo tenemos

$$x1 = -15/8, \quad x2 = -3/2, \quad x3 = 45/8$$

Problema 3

Los momentos de inercia de una placa delgada con respecto a los ejes x e y de un sistema de coordenadas son:
I_{xx}=0.20 kg-m^2 $\quad$ I_{yy}=0.12 kg-m^2
Los productos de inercia son:
I_{xy}= I_{yx}= -0.14 kg-m^2
El tensor de inercia se denota por la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} \\ -I_{yx} & I_{yy} \end{bmatrix}$$

Los momentos de inercia principales son eigenvalores de A, y los cosenos directores de los ejes principales correspondientes son proporcionales a los eigenvectores. Los dos cosenos directores c_1 y c_2 para un eje satisfacen la relación $c_1^2+c_2^2=1$.

a) Localizar los valores propios en el plano complejo.

Solución:

Reemplazando: $A = \begin{bmatrix} 0.20 & 0.14 \\ 0.14 & 0.12 \end{bmatrix}$

Por Gershegorin:

$|z - 0.20| \le 0.14 \qquad 0.06 \le z \le 0.34$

$|z - 0.12| \le 0.14 \qquad -0.02 \le z \le 0.26$

Teniendo en cuenta que la matriz es simetrica, los valores propios seran reales y estarán en el siguiente intervalo: $-0.02 \le z \le 0.34$

b) Determine el valor propio dominante, usando el método de la potencia inversa con desplazamiento con una precisión de 4 cifras decimales exactas, a partir de $(1,0)^T$, considere un valor de "q" adecuado, obtenido a partir de a).

Solución

Tomamos q=0.34 extremo superior del rango anterior:

$$B = (A - qI)^{-1} = \begin{bmatrix} -19.6429 & -12.5 \\ -12.5 & -12.5 \end{bmatrix}$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = Bx_0 = \begin{bmatrix} -19.6429 \\ -12.5 \end{bmatrix} \quad u_1 = -19.6429 \quad x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.6364 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = q + \frac{1}{u_1} = 0.2891$$

$$y_2 = Bx_1 = \begin{bmatrix} -27.5974 \\ -20.4545 \end{bmatrix} \quad u_2 = -27.5974 \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.7412 \end{bmatrix} \quad \lambda_2 = 0.3038$$

$$y_3 = Bx_2 = \begin{bmatrix} -28.9076 \\ -21.7647 \end{bmatrix} \quad u_3 = -28.9076 \quad x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.7529 \end{bmatrix} \quad \lambda_3 = 0.3054$$

$$y_4 = Bx_3 = \begin{bmatrix} -29.0542 \\ -21.9113 \end{bmatrix} \quad u_4 = -29.0542 \quad x_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.7542 \end{bmatrix} \quad \lambda_4 = 0.3056$$

$$y_5 = Bx_4 = \begin{bmatrix} -29.0698 \\ -21.9269 \end{bmatrix} \quad u_5 = -29.0698 \quad x_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.7543 \end{bmatrix} \quad \lambda_5 = 0.3056$$

c) Muestre los cosenos directores a partir de los resultados obtenidos en b).

Solución

Cosenos directores se obtienen de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \frac{x_5}{\|x_5\|_2} = \begin{bmatrix} 0.7984 \\ 0.6022 \end{bmatrix}$$

Problema 4

Un cable telefónico suspendido entre dos postes tiene un peso de α Kilogramos-fuerza/m. La tensión en medio del cable es obtenida por la solución de la siguiente ecuación:

$$\frac{2T}{\alpha} senh\left(\frac{\alpha L}{2T}\right) = S$$

Donde:
S es la longitud del cable = 32m.
L es la distancia entre los dos postes = 30m.
α = 0.10 Kgf/m
Se pide:

a) Utilice el método de la bisección para hallar la tensión T a partir de las siguientes condiciones : intervalo inicial [2 3], Tol= 1E-2.

Solución

Resolviendo por bisección $\quad x = T \qquad f(x) = 20x\sinh\left(\frac{1.5}{x}\right) - 32$

$a = 2 \qquad b = 3 \qquad f(a)*f(b)<0$

I	*a*	*b*	*x*
0	2	3	2.5
1	2	2.5	2.25
2	2.25	2.5	2.375
3	2.375	2.5	2.4375
4	2.375	2.4375	2.40625
5	2.375	2.40625	2.390625
6	2.390625	2.40625	2.3984375

b) El valor hallado en la última iteración del item a) considérelo como valor inicial para aplicar el método de Newton Rapshon. Muestre el algoritmo y realice 02 iteraciones. Obtenga el error en la última iteración.

Solución

$$f(x) = 20x\sinh\left(\frac{1.5}{x}\right) - 32$$

$$\frac{df(x)}{dx} = 20x\sinh\left(\frac{1.5}{x}\right) - \frac{30}{x}\cosh\left(\frac{1.5}{x}\right)$$

Algoritmo: $\quad x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad$ i=0,1, 2

i	x	f(x)	df/dx	t
0	2.4063e+000	-1.8905e-002	-1.6786e+000	1.1262e-002
1	2.3950e+000	1.3700e-004	-1.7030e+000	-8.0448e-005
2	2.3951e+000	7.0812e-009	-1.7028e+000	-4.1585e-009

Error = 4.1585e-009

c) ¿Es posible encontrar un algoritmo del punto fijo para encontrar el cero cercano a 2.3?. Si su respuesta es afirmativa encuentre el algoritmo. Justifique.

Solución

$$g(x) = \frac{1.5}{a\sinh\left(\frac{8}{5x}\right)}$$

$$g'(x) = \left(\frac{7.5}{\left(a\sinh\left(\frac{8}{5x}\right)\right)^2 \sqrt{25+64*x^2}}\right)_{2.3} < 1$$

Algoritmo $\quad x_{i+1} = \dfrac{1.5}{a\sinh\left(\dfrac{8}{5x_i}\right)} \quad i=0,1,2...$

Los Profesores